

Notions de bases de l'algèbre linéaire

B. SEDDOUG

CPGE Ibn Ghazi Rabat (classe MP)

9 octobre 2025

Plan de l'exposé

Généralités sur les espaces vectoriels

- Définitions – Exemples
- Somme et somme directe
- Combinaisons linéaires
- Dimension finie

Applications linéaires

- Définitions – exemples
- Bases et applications linéaires
- Matrice d'une application linéaire
- Changement de bases

Déterminant

- Différentes notions du déterminant
- Déterminant de matrices par blocs

Cadre général

Dans toute la suite $\mathbb{K}$ désigne un sous corps de $\mathbb{C}$.

Dans la pratique, on se limite aux cas

$$\mathbb{K} = \mathbb{R}$$

ou

$$\mathbb{K} = \mathbb{C}.$$

Généralités sur les espaces vectoriels

Définitions – Exemples

Somme et somme directe

Combinaisons linéaires

Dimension finie

Définitions – Exemples

Définition

Définition 1

On dit qu'un ensemble E est un $\mathbb{K}$ -ev s'il est muni d'une loi de composition interne $+$ et d'une loi de composition externe $\cdot$ à coefficients dans $\mathbb{K}$, vérifiant les axiomes suivants :

- $(E, +)$ est un groupe abélien, dont l'élément neutre sera noté dorénavant par 0_E .
- $(\alpha + \beta).x = \alpha.x + \beta.x, \quad \forall x \in E, \quad \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2.$
- $\alpha.(x + y) = \alpha.x + \alpha.y, \quad \forall (x, y) \in E^2, \quad \forall \alpha \in \mathbb{K}.$
- $\alpha(\beta.x) = (\alpha\beta).x, \quad \forall x \in E, \quad \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2.$
- $1.x = x, \quad \forall x \in E.$

Des propriétés de la définition découlent les règles de calcul dans un $\mathbb{K}$ -ev. En particulier :

- $(\alpha - \beta).x = \alpha.x - \beta.x, \quad \forall x \in E, \quad \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2.$
- $\alpha.(x - y) = \alpha.x - \alpha.y, \quad \forall (x, y) \in E^2, \quad \forall \alpha \in \mathbb{K}.$
- $\forall (\alpha, x) \in \mathbb{K} \times E : \alpha.x = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0 \text{ ou } x = 0.$

Exemples d'espaces vectoriels usuels

- Le plan $\mathbb{R}^2$ (ou $\mathbb{C}$) est un $\mathbb{R}$ – ev et en général $\mathbb{K}^n$ est un $\mathbb{K}$ – ev pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
- **Produit d'espaces vectoriels** : Si $E_1, E_2, \dots, E_n$ sont des $\mathbb{K}$ – ev, on définit sur leur produit

cartésien $\prod_{i=1}^n E_i$, une structure de $\mathbb{K}$ – ev de manière naturelle, en posant :

- ▶ $(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n),$
- ▶ $\lambda \cdot (x_1, \dots, x_n) = (\lambda \cdot x_1, \dots, \lambda \cdot x_n),$

pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ et pour tout $(x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)$ dans $\prod_{i=1}^n E_i$.

- De même les ensembles de matrices, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$.
- L'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$, $\mathbb{K}[X]$ et ses sous ensembles $\mathbb{K}_n[X]$, $n \in \mathbb{N}^*$ sont des $\mathbb{K}$ – ev.

Exemples : Espaces fonctionnels

- Si E est un $\mathbb{K}$ – ev et X un ensemble non vide, l'ensemble des applications de X dans E , E^X est un $\mathbb{K}$ – ev pour les lois naturelles :
 - ▶ $f + g : X \longrightarrow E; x \longmapsto f(x) + g(x),$
 - ▶ $\lambda.f : X \longrightarrow E; x \longmapsto \lambda.f(x),$pour tout f, g dans E^X et pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$.
- Ainsi les ensembles de suites et de fonctions à valeur dans un $\mathbb{K}$ – ev sont des $\mathbb{K}$ – ev. En particulier $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et $\mathbb{K}^{\mathbb{R}}$.

Sous espaces vectoriels (sev)

Définition 2

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, une partie F de E est dite sous espace vectoriel de E si elle vérifie les deux propriétés suivantes :

- $0_E \in F$.
- $\forall (x, y) \in F^2, \forall \lambda \in \mathbb{K}$ on a : $x + \lambda y \in F$.

Autrement dit F est une partie de E stable pour les deux lois $+$ et $\cdot$ et qui hérite de E sa structure d'espace vectoriel.

Remarque 1

Pour montrer qu'un ensemble est un espace vectoriel, il est plus judicieux de remarquer qu'il est inclus dans un espace vectoriel, puis montrer que c'en est un sous espace vectoriel .

Exemples de sev

- Dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, l'ensemble $\mathcal{C}_0$ des suites qui convergent vers 0 est un sev.
- Dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, les ensembles des fonctions paires et des fonctions impaires sont des sev.
- Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, les ensembles $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{R})$ des matrices triangulaires supérieures, $\mathcal{T}_n^-(\mathbb{R})$ des matrices triangulaires inférieures, $\mathcal{D}_n(\mathbb{R})$ des matrices diagonales sont des sev.
- ...

Proposition 1

Si $(F_i)_{i \in I}$ est une famille de sev de E alors $\bigcap_{i \in I} F_i$ est aussi un sev de E .

Exercice 1

Soient F et G deux sev de E . $F \cup G$ est un sev de E si et seulement si $F \subset G$ ou $G \subset F$.

Notion d'algèbre

Les cas particuliers des $\mathbb{K} - \text{ev} : \mathbb{K}[X], \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \dots$ qui possèdent, en plus, une structure d'anneau, nous conduit à la définition suivante.

Définition 3

On appelle algèbre sur $\mathbb{K}$, tout ensemble A muni de deux lois de composition interne $+$, $\times$ et d'une loi de composition externe $\cdot$, tel que :

1. $(A, +, \cdot)$ soit un $\mathbb{K} - \text{ev}$.
2. $(A, +, \times)$ soit un anneau, dont l'élément neutre pour la 2ème loi est noté 1_A .
3. $\forall (x, y) \in A^2, \forall \lambda \in \mathbb{K}$, on a : $\lambda \cdot (x \times y) = (\lambda \cdot x) \times y = x \times (\lambda \cdot y)$

Remarque 2

Dans une algèbre, on peut donc effectuer des opérations d'addition (de soustraction) ainsi que les multiplications entre deux éléments de l'algèbre et entre un élément de l'algèbre et un scalaire.

Somme et somme directe

Somme et somme directe

Dans toute cette partie on considère des sous-espaces (sev) d'un même espace vectoriel E .

Un cas simple : la **somme** de deux sev

$$F + G = \{a + b \mid a \in F, b \in G\}$$

On dit que la somme est **directe** et on note

$$F + G = F \oplus G$$

si $F \cap G = \{0\}$.

Si $E = F \oplus G$, on dit que F et G sont **supplémentaires**.

On généralise la somme à plusieurs sous espaces vectoriels.

Somme de plusieurs sev

Proposition 2

Si $E_1, E_2, \dots, E_p$ sont des sev de E , la somme

$$E_1 + E_2 + \dots + E_p = \left\{ \sum_{i=1}^p a_i \mid (a_1, \dots, a_p) \in \prod_{i=1}^p E_i \right\}$$

est aussi un sev de E appelé la somme des $E_i, 1 \leq i \leq p$.

Définition 4

Les sous-espaces $E_1, \dots, E_p$ sont en somme directe, on écrit $E_1 \oplus \dots \oplus E_p$ ou bien $\bigoplus_{i=1}^p E_i$,

si tout élément de $E_1 + \dots + E_p$ s'écrit de façon unique comme somme d'éléments des $E_i, i = 1 \dots p$.
On dit que $E_1, \dots, E_p$ forment une famille de sev supplémentaires si leur somme est directe et vaut E .

Somme directe (caractérisation)

Remarque 3

Il ne suffit pas que les intersections 2 à 2 des sev soient réduites à $\{0\}$ (Voir feuille de TD pour un exemple).

Proposition 3

Les Propositions suivantes sont équivalentes

- $E = E_1 \oplus \dots \oplus E_p$
- $E = E_1 + \dots + E_p$ et $\forall j \in [1, p] : E_j \cap \sum_{i \neq j} E_i = \{0\}$.

Important ! On verra une caractérisation pratique dans le cas de la dimension finie.

Combinaisons linéaires

Combinaisons linéaires

Définition 5

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev, $x \in E$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_k)_{1 \leq k \leq n} \in E^n$ une famille de vecteurs de E . On dit que x est une combinaison linéaire de $x_1, \dots, x_n$, s'il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $x = \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k$.

Proposition 4

L'ensemble des combinaisons linéaires d'une famille $(x_k)_{1 \leq k \leq n}$ est un sous espace vectoriel de E , appelé le **sous espace vectoriel de E engendré par $(x_k)_{1 \leq k \leq n}$** et noté $\text{Vect}((x_k)_{1 \leq k \leq n})$.
Autrement dit

$$x \in \text{Vect}((x_k)_{1 \leq k \leq n}) \iff \exists (\lambda_k)_{1 \leq k \leq n} \in \mathbb{K}^n \text{ tel que } x = \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k.$$

c'est le plus petit sous espace vectoriel de E contenant la famille $(x_k)_{1 \leq k \leq n}$. Par convention on écrit, $\text{Vect}(\emptyset) = \{0_E\}$.

Familles génératrices, familles liées

Définition 6

Une famille $\mathcal{B}$ est dite génératrice de E si tout élément de E s'écrit comme combinaison linéaire d'éléments de $\mathcal{B}$, autrement dit $\text{Vect}(\mathcal{B}) = E$.

Ainsi pour montrer que $(x_k)_{1 \leq k \leq n}$ est une famille génératrices de E , il suffit de montrer que

$$\forall x \in E, \exists (\lambda_k)_{1 \leq k \leq n} \in \mathbb{K}^n \text{ tel que } x = \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k.$$

Définition 7

Une famille $(x_k)_{1 \leq k \leq n}$ est dite liée lorsque l'un de ses éléments est combinaison linéaire des autres. Ce

qui revient à dire qu'il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \setminus \{(0, \dots, 0)\}$ tel que $\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k = 0$.

La famille est dite libre si elle n'est pas liée, autrement dit pour tout $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$:

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k = 0 \implies (\lambda_1, \dots, \lambda_n) = (0, \dots, 0).$$

Familles génératrices, familles liées

Remarque 4

Il n'est pas difficile de voir que :

- Une famille formée par un seul élément est libre si et seulement si cet élément n'est pas nul.
- Une famille formée par deux éléments est libre si et seulement si ces deux éléments ne sont pas proportionnels.
- Toute famille contenant un élément nul est liée.
- Toute famille où un élément se répète au moins deux fois est liée.
- Toute famille contenant une famille liée est aussi liée.
- Toute famille contenue dans une famille libre est aussi libre.

Bases d'un espace vectoriel

Définition 8

On appelle base de E toute famille de vecteurs de E à la fois libre et génératrice de E . Autrement dit $\mathcal{B} = (x_k)_{1 \leq k \leq n}$ une base de E si

$$\forall x \in E, \exists ! (\lambda_k)_{1 \leq k \leq n} \in \mathbb{K}^n \text{ tel que } x = \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k.$$

Les coefficients $(\lambda_k)_{1 \leq k \leq n}$ s'appellent coordonnées de x dans la base $\mathcal{B}$.

Remarque 5

Soit F et G deux sous espace vectoriel d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E et $\mathcal{B}_1 \subset F, \mathcal{B}_2 \subset G$, alors :

- $\text{Vect}(\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2) = \text{Vect}(\mathcal{B}_1) + \text{Vect}(\mathcal{B}_2)$.
- Si de plus $F \cap G = \{0_E\}$, alors $\text{Vect}(\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2) = \text{Vect}(\mathcal{B}_1) \oplus \text{Vect}(\mathcal{B}_2)$.

Familles indexées par un ensemble infini

Une famille de vecteurs peut être indexée par un ensemble I quelconque d'indices. Par contre la notion de combinaison linéaire n'a de sens que pour une famille finie (on ne sait pas faire de sommes infinies).

Définition 9

On appelle combinaison linéaire de la famille $(u_i)_{i \in I}$ toute combinaison linéaire d'une sous-famille finie, càd tout vecteur de la forme

$$\sum_{i \in J} \lambda_i u_i \quad \text{où } J \text{ est une partie finie de } I$$

L'ensemble des combinaisons linéaires d'une famille donnée est le **sous-espace vectoriel engendré** par cette famille.

Exemple 1

Dans $\mathbb{K}[X]$, la famille des $(X^i)_{i \in \mathbb{N}}$ est indexée par $\mathbb{N}$. Tout polynôme est combinaison linéaire de cette famille.

Familles indexées par un ensemble infini

Plus généralement, les notions de familles libres, génératrices sont inchangées :

Définition 10

Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de E .

- La famille est libre si toute combinaison linéaire nulle est triviale, i.e. si

$$\sum_{i \in J} \lambda_i u_i = 0 \implies \forall i \in J : \lambda_i = 0$$

pour toute partie finie J de I .

- La famille est génératrice de E si tout vecteur de E en est une combinaison linéaire.
- La famille est une base de E si elle est libre et génératrice. Cela signifie que tout vecteur de E s'écrit de façon unique comme combinaison linéaire des vecteurs de la famille.

Exemple 2

Toute famille de polynômes ayant des degrés étagés, i.e. toute famille $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N} : \deg P_n < \deg P_{n+1}$, est libre. En particulier $(X^i)_{i \in \mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{K}[X]$.

Dimension finie

Espaces de dimension finie

Définition 11

Un espace vectoriel est dit de dimension finie s'il admet au moins une famille génératrices finie.

Trois théorèmes importants :

Théorème 1

De toute famille génératrices d'un $\mathbb{K}$ – ev de dimension finie, on peut extraire une base.

Théorème 2 (Théorème de la base incomplète)

Toute famille libre d'un espace vectoriel de dimension finie peut être complétée en une base.

Théorème 3 (de la dimension)

Dans un $\mathbb{K}$ – ev de dimension finie, toutes les bases ont le même nombre d'éléments.
Ce même nombre de vecteurs est appelée la dimension de E (comme $\mathbb{K}$ – ev) notée $\dim E$.

Exemples d'espaces de dimension finie

- $\mathbb{K}^n, \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}); \mathbb{K}_n[X]$ sont de dimensions finies et
$$\dim \mathbb{K}^n = n, \dim \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) = n \times p, \dim \mathbb{K}_n[X] = n + 1.$$
- Si E et F sont de dimensions finies, alors $E \times F$ aussi et $\dim E \times F = \dim E + \dim F$.

Proposition 5

Tout sev F d'un $\mathbb{K}$ -ev E de dimension finie et aussi de dimension finie et $\dim F \leq \dim E$. Avec $F = E$ si et seulement si $\dim E = \dim F$.

Dimension de la somme de deux sev

Théorème 4

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie, F et G deux sous espace vectoriel de E alors

$$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$$

si en plus $F \cap G = \{0_E\}$, alors :

$$\dim(F \oplus G) = \dim(F) + \dim(G)$$

En général, si $F_1, \dots, F_k$ sont en somme directe, alors :

$$\dim(F_1 \oplus \dots \oplus F_k) = \dim(F_1) + \dots + \dim(F_k)$$

Caractérisation de bases et de somme directe

Proposition 6

Soit $\mathcal{F} = (v_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille de vecteurs de E , $\dim E = n$. Alors $\mathcal{F}$ est une base de E si et seulement si $\mathcal{F}$ est libre si et seulement si $\mathcal{F}$ est génératrice.

Proposition 7

Si $\dim F + \dim G = \dim E$ alors

$$E = F \oplus G \iff F \cap G = \{0\} \iff E = F + G.$$

et en général, si $\dim E = \dim E_1 + \dots + \dim E_p$ alors

$$E = \bigoplus_{i=1}^p E_i \iff \forall j \in [1, p] : E_j \cap \sum_{i \neq j} E_i = \{0\} \iff E = E_1 + \dots + E_p.$$

Applications linéaires

Définitions – exemples

Bases et applications linéaires

Matrice d'une application linéaire

Changement de bases

Définitions – exemples

Définitions

Définition 12

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels et $u : E \rightarrow F$, on dit que u est linéaire si elle vérifie la propriété suivante :

- $\forall (x, y) \in E^2 : u(x + y) = u(x) + u(y)$,
- $\forall x \in E^2, \quad \forall \lambda \in \mathbb{K} : u(\lambda x) = \lambda u(x)$.

Ou de manière équivalente :

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad \forall \lambda \in \mathbb{K} : u(x + \lambda y) = u(x) + \lambda u(y)$$

Remarque 6

- Toute application linéaire bijective est appelée **isomorphisme**.
- Toute application linéaire de $E \longrightarrow E$ est appelée **endomorphisme** (**automorphisme** si en plus bijective) de E .
- L'ensemble des applications linéaires de E vers F se note $\mathcal{L}(E, F)$ et $\mathcal{L}(E)$ au lieu de $\mathcal{L}(E, E)$ si $E = F$.

Propriétés des applications linéaires

Propriétés

Soient $u \in \mathcal{L}(E, F)$, $\mathcal{B} = ((x_k)_{1 \leq k \leq n})$. On note $u(\mathcal{B})$ la famille $((u(x_k))_{1 \leq k \leq n})$, on a :

- Si $(\lambda_k)_{1 \leq k \leq n} \in \mathbb{K}^n$ alors :

$$u \left(\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k \right) = \sum_{k=1}^n \lambda_k u(x_k) \text{ en particulier } u(\text{Vect}(\mathcal{B})) = \text{Vect}(u(\mathcal{B})).$$

- Si $\mathcal{B}$ est liée, alors $u(\mathcal{B})$ est liée dans F .
- Si $\mathcal{B}$ est libre dans E et u injective, alors $u(\mathcal{B})$ est libre dans F .
- Si $\mathcal{B}$ est une famille génératrices de E , alors $u(\mathcal{B})$ est une famille génératrices de $\text{Im}(u)$. En particulier Si $\mathcal{B}$ est une famille génératrices de E , alors u est surjective si et seulement si $u(\mathcal{B})$ est une famille génératrices de F .
- Si $\mathcal{B}$ est une base de E , alors u est un isomorphisme si et seulement si $u(\mathcal{B})$ est une base de F .

Propriétés des applications linéaires (suite)

- Une application linéaire est entièrement déterminée par ses valeurs sur une base.
- L'image directe et réciproque d'un sous espace vectoriel par une application linéaire est aussi un sous espace vectoriel. En particulier, pour tout $u \in \mathcal{L}(E, F)$,

$$\ker u = \{x \in E \text{ tel que } u(x) = 0_F\}$$

est un sous espace vectoriel de E , on l'appelle **noyau** de u et $\text{Im}(u) = u(E)$ est un sous espace vectoriel de F , on l'appelle **image** de u .

- $u \in \mathcal{L}(E, F)$ est surjective si et seulement si $\text{Im}(u) = F$.
- $u \in \mathcal{L}(E, F)$ est injective si et seulement si $\ker u = \{0_E\}$.

Proposition 8

Si E est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension d , et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_d)$ une base de E , l'application

$$E \longrightarrow \mathbb{K}^d ; x = \sum_{i=1}^d x_i e_i \longmapsto (x_1, \dots, x_d)$$

est un isomorphisme de $\mathbb{K}$ -ev. On dit alors que E est isomorphe à $\mathbb{K}^d$.

En général deux $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie sont isomorphes si et seulement si ils sont de même dimension.

Propriétés des applications linéaires (suite)

L'ensemble F^E des applications de E dans F étant un $\mathbb{K}$ -ev, et $\mathcal{L}(E, F) \subset F^E$. En plus :

Proposition 9

- $\mathcal{L}(E, F)$ est un $\mathbb{K}$ -ev pour les opérations du $\mathbb{K}$ -ev F^E définies pour tout $f, g \in \mathcal{L}(E, F)$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ par :

$$\forall x \in E : (f + g)(x) = f(x) + g(x) \text{ et } (\lambda.f)(x) = \lambda.f(x).$$

- L'espace vectoriel $\mathcal{L}(E)$ a une structure de $\mathbb{K}$ -algèbre pour la composition des applications. En particulier, toute composée d'applications linéaire est linéaire. En plus la réciproque d'une application linéaire bijective est aussi linéaire.

Le groupe des unités (application linéaires bijectives) de l'algèbre $\mathcal{L}(E)$ est noté $\mathcal{GL}(E)$, on l'appelle **le groupe linéaire de E** .

Proposition 10

Si E et F sont de dimensions finies, alors $\mathcal{L}(E, F)$ est aussi et $\dim \mathcal{L}(E, F) = \dim E \times \dim F$.

Exemples : projections

Si $E = E_1 \oplus E_2$, alors

$$\forall x \in E, \exists! (x_1, x_2) \in E_1 \times E_2 \text{ tel que } x = x_1 + x_2,$$

x_1 s'appelle la projection de x sur E_1 parallèlement E_2 et x_2 la projection de x sur E_2 parallèlement E_1 .

Les deux applications $p_1 : x \mapsto x_1$ et $p_2 : x \mapsto x_2$ sont linéaires et vérifient :

$$p_i^2 = p_i, i = 1 \text{ ou } 2 ; p_1 + p_2 = Id_E \text{ et } p_1 p_2 = p_2 p_1 = 0$$

en plus

$$E = \text{Im}(p_i) \oplus \ker(p_i), i = 1 \text{ ou } 2.$$

Définition 13

On appelle projecteur sur E , tout endomorphisme, p de E tel que

$$p^2 = p.$$

Exemples : projections (suite)

Proposition 11

Soit p un projecteur de E , on a les propriétés suivantes :

- $E = \text{Im}(p) \oplus \ker(p)$.
- $x \in \text{Im}(p) \iff p(x) = x$.
- p est la projection sur son image parallèlement son noyau.

Exercice 2

Soient p, q deux projecteurs. Montrer que $p + q$ est encore un projecteur si et seulement si

$$pq = qp = 0_{\mathcal{L}(E)}$$

Conclusion : Toute projection est un projecteur, et tout projecteur est une projection sur son image parallèlement son noyau.

Exemples : projections (cas général)

En général, on définit les projecteurs associés à une décomposition en somme directe $E = E_1 \oplus \dots \oplus E_p$, par

$$p_j : x = \sum_{i=1}^p x_i \longmapsto x_j$$

Ces projecteurs vérifient

$$\sum_i p_i = Id_E \text{ et } p_i \circ p_j = 0 \text{ pour } i \neq j.$$

Exemples : symétries

Définition 14

On appelle symétrie sur E , tout endomorphisme, s de E tel que : $s^2 = id_E$.

Proposition 12

Soit s une symétrie de E , on a les propriétés suivantes :

- $p = \frac{1}{2}(s + id_E)$ est un projecteur.
- En posant $F = \text{Im}(p) = \ker(s - Id_E)$ et $G = \ker p = \ker(s + Id_E)$, on a $E = F \oplus G$ avec

$$s(x) = \begin{cases} x & \forall x \in F \\ -x & \forall x \in G \end{cases}.$$

On dit alors que s est la symétrie par rapport F parallèlement G .

- Inversement tout projecteur p permet de définir la symétrie $s = 2p - id_E$ sur $\text{Im}(p)$ parallèlement $\ker(p)$.

Exemple : Transposée d'une matrice

Définition 15

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on appelle transposé de A , la matrice notée ${}^tA = (b_{i,j})_{1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq n} \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, telle que

$$\forall (i,j) \in \llbracket 1, p \rrbracket \times \llbracket 1, n \rrbracket, b_{i,j} = a_{j,i}$$

Proposition 13

L'application

$$\tau : \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K}); M \longmapsto {}^tM$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels. En plus,

- Pour tout $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$
$${}^t(AB) = {}^tB {}^tA.$$
- Si $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible alors tP est aussi inversible et $({}^tP)^{-1} = {}^t(P^{-1})$.
- Si $n = p$, τ est une symétrie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\ker(\tau - Id) = \mathcal{S}_n(\mathbb{K})$, $\ker(\tau + Id) = \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ qui sont donc supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Exemple : Trace d'une matrice carrée

Définition 16

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on appelle trace de A , le nombre note $\text{Tr}(A)$, défini par la relation suivante :

$$\text{Tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{i,i}.$$

Proposition 14

L'application

$$\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}; M \longmapsto \text{Tr}(M)$$

est linéaire. En plus, pour tout $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$

$$\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$$

Et pour tout $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inversible et pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a :

$$\text{Tr}(P^{-1}AP) = \text{Tr}(A)$$

On dit que la trace est une **forme linéaire** sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Exemples : formes linéaires

Définition 17

On appelle forme linéaire sur E , toute application linéaire de E dans $\mathbb{K}$.

Exercice 3

Pour toute forme linéaire φ sur $\mathbb{K}^n$, il existe un unique n -uplet $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que

$$\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n : \varphi(x) = \sum_{i=1}^n a_i x_i.$$

Proposition 15

Toute forme linéaire sur E est soit nulle soit surjective.

Bases et applications linéaires

Rang d'une application linéaire

Définition 18

Soit $u \in \mathcal{L}(E; F)$. Si $\text{Im } u$ est de dimension finie, on pose $\text{rang } u = \dim(\text{Im } u)$.

Remarque 7

Si E et F sont de dimension finie, alors

- $\text{rang } u \leq \min(\dim E, \dim F)$
- $(\text{rang } u = \dim F \iff u \text{ surjective})$ et $(\text{rang } u = \dim E \iff u \text{ injective})$.

Théorème 5 (de factorisation)

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Tout supplémentaire de $\ker u$ est isomorphe $\text{Im } u$. En particulier si $\dim E$ est finie, on a :

$$\dim E = \dim \ker u + \dim \text{Im}(u) \quad (\text{formule du rang})$$

et si $\dim E = \dim F$, alors

$$u \text{ bijective} \iff u \text{ injective} \iff u \text{ surjective}$$

Matrice d'une application linéaire

Matrice d'une famille de vecteurs dans une base

Définition 19

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension n , $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $\mathcal{C} = (V_1, \dots, V_p)$ une famille de p vecteurs de E , la matrice de la famille $\mathcal{C}$ dans la base $\mathcal{B}$ est la matrice notée $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C}) = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ telle que

$$\forall j \in [1, p] : V_j = \sum_{i=1}^n a_{i,j} e_i .$$

dont les colonnes sont formées par les coordonnées des éléments de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{B}$.

Exemple 3 (Matrice diagonale)

$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = I_n$ et en général : $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\lambda_1 e_1, \dots, \lambda_n e_n) = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

Exemple 4 (Matrice de passage entre deux bases)

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ deux bases de E . La matrice de passage de $\mathcal{B}_1$ vers $\mathcal{B}_2$ est la matrice carrée d'ordre n notée $\mathcal{P}_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}$ définie par :

$$\mathcal{P}_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2} = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_1}(\mathcal{B}_2).$$

Matrice d'une application linéaire

Définition 20

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -espace vectoriel tels que $\dim E = p$ et $\dim F = n$. Soient $\mathcal{B} = (e_j)_{1 \leq j \leq p}$ une base de E et $\mathcal{B}' = (e'_i)_{1 \leq i \leq n}$ une base de F et $u : E \rightarrow F$ une application linéaire. On appelle la matrice de u relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$, la matrice

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(u) = \mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(u(e_1), \dots, u(e_p)) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$$

c'est à dire, $\mathcal{M}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(u) = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ tels que :

$$\forall j \in [1, p] : u(e_j) = \sum_{i=1}^n a_{i,j} e'_i .$$

Dans le cas où $E = F$ et $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$ on note tout simplement $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u)$, c'est alors une matrice carrée.

Exemple 5 (Matrice de passage entre deux bases)

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ deux bases de E . La matrice de passage de $\mathcal{B}_1$ vers $\mathcal{B}_2$ est donnée par :

$$\mathcal{P}_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2} = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1}(id_E).$$

Matrice d'une application linéaire (suite)

Propriétés

- L'application $u \longrightarrow \mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(u)$ définit un isomorphisme d'espaces vectoriels entre $\mathcal{L}(E, F)$ et $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

- En plus si G est un autre $\mathbb{K}$ -ev et $\mathcal{B}''$ une base de G , alors

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}''}(v \circ u) = \mathcal{M}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}''}(v) \cdot \mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(u)$$

pour tout $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, G)$. En particulier l'application

$$u \in \mathcal{L}(E) \longmapsto \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

est un isomorphisme d'algèbre.

- En particulier, $\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(u)$ est inversible si et seulement si u est un isomorphisme et dans ce cas

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(u)^{-1} = \mathcal{M}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(u^{-1}).$$

Matrice d'une application linéaire (suite)

Définition 21

Soit $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$,

- On appelle rang de M le rang de ces vecteurs colonnes dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.
- On appelle application linéaire canoniquement associée à M , l'application linéaire de $\mathbb{K}^p$ (ou $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$) vers $\mathbb{K}^n$ (ou $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$) dont la matrices dans les bases canoniques est M , c'est à dire, l'application

$$\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}); X \longmapsto MX.$$

Proposition 16

Soient $u \in \mathcal{L}(E, F)$, $\mathcal{B}$ base de E , $\mathcal{B}'$ base de F et $M = \mathcal{M}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(u)$. Alors $\text{rang}(u) = \text{rang}(M)$.

De même si $\mathcal{C}$ est une famille de vecteur dans E , alors $\text{rang}(\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C})) = \text{rang}(\mathcal{C})$.

En particulier $\mathcal{C}$ est une base de E si et seulement si $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C})$ est inversible.

Changement de bases

Expression analytique d'une application linéaire

Remarque 8

Avec ces notations, si $x = \sum_{j=1}^p x_j e_j \in E$, et $y = u(x) = \sum_{i=1}^n y_i e'_i \in F$, alors

$$Y = MX$$

(Expression matricielle de u)

où $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_p \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}$ représentent les matrices colonnes formées par les coordonnées de x dans $\mathcal{B}$ et y dans $\mathcal{B}'$. Et si on pose $M = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on a :

$$y_i = \sum_{j=1}^p a_{i,j} x_j, \quad i = 1, \dots, n$$

(Expression analytique de u)

Exemple 6 (Formule de changement de bases)

Si $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ sont de bases de E , $x \in E$, $X_1 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ désigne la matrice colonne formée par les coordonnées de x dans $\mathcal{B}_1$ et $X_2 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ celle formée par ses coordonnées dans $\mathcal{B}_2$ alors

$$X_1 = PX_2$$

(formule de changement de bases)

Changement de bases

Proposition 17

Soient $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ deux bases de E , $\mathcal{B}'_1, \mathcal{B}'_2$ deux bases de F , $u \in \mathcal{L}(E, F)$, si on pose

$$M_2 = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_2, \mathcal{B}'_2}(u), \quad M_1 = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}'_1}(u) \quad \text{et} \quad Q = \mathcal{P}_{\mathcal{B}'_1, \mathcal{B}'_2}, \quad P = \mathcal{P}_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}, \text{ alors}$$
$$M_2 = Q^{-1} M_1 P,$$

on dit alors que M_1 et M_2 sont équivalentes. En particulier si $E = F$, $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}'_1$, $\mathcal{B}_2 = \mathcal{B}'_2$ et $M_2 = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_2}(u)$, $M_1 = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_1}(u)$ alors

$$M_2 = P^{-1} M_1 P,$$

on dit alors que M_1 et M_2 sont semblables.

Matrices équivalentes, matrices semblables

Remarque 9 (Matrices équivalentes, matrices semblables)

- Deux matrices sont équivalentes si et seulement si elles représentent la même application linéaire dans des bases différentes.
- Deux matrices sont semblables si et seulement si elles représentent le même endomorphisme dans deux bases différentes.

Exercice 4 (Caractérisation de l'équivalence de matrice)

Deux matrices sont équivalentes si et seulement si elles ont même rang.

On en déduit que si $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ alors

$$\text{rang}({}^t M) = \text{rang}(M).$$

Proposition 18 (et définition)

Deux matrices semblables ont la même trace. Si $u \in \mathcal{L}(E)$, on appelle trace de u qu'on note (aussi $\text{Tr}(u)$) la trace de sa matrice dans une base (quelconque) de E .

Déterminant

Différentes notions du déterminant

Déterminant de matrices par blocs

Différentes notion du déterminant

Déterminant d'une matrice carrée d'ordre n

Définition 22

Le déterminant d'une matrice carrée d'ordre n , $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, noté $\det(A)$ est par définition le scalaire :

$$\det A = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{i,\sigma(i)} = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^n a_{\sigma(j),j} \text{ noté aussi } \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

Remarque 10

- Puisque pour tout $\sigma \in \mathcal{S}_n$, on a $\varepsilon(\sigma^{-1}) = \varepsilon(\sigma)$, en indexant la somme par σ^{-1} , on a l'égalité des deux sommes qui expriment le fait, que pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,

$$\det({}^t A) = \det A.$$

- Dans la définition ci-dessus, la sommation porte sur l'ensemble des permutations de $\llbracket 1, n \rrbracket$, qui sont en nombre de $n!$. Chaque terme de la somme est un produit de n termes.

Exemples de déterminants

Exemple 7

- Pour $n = 2$,

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix} = a_{1,1}a_{2,2} - a_{2,1}a_{1,2}$$

- Pour $n = 3$, on a 6 produit de trois termes chacun,

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} = a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} + a_{1,2}a_{2,3}a_{3,1} + a_{1,3}a_{2,1}a_{3,2} \\ - a_{1,1}a_{2,3}a_{3,2} - a_{1,3}a_{2,2}a_{3,1} - a_{2,1}a_{1,2}a_{3,3}$$

- $\det I_n = 1$ et, en général, pour $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$,

$$\det(\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)) = \prod_{i=1}^n \lambda_i.$$

- Si $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est triangulaire (inf. ou sup.) alors $\det(A) = \prod_{i=1}^n a_{i,i}$, car tous les termes de la somme sont nuls sauf (peut être) celui qui correspond à $\sigma = \text{Id}_{[1,n]}$.

Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base

Dans toute la suite du cours, E désigne un $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie n .

Définition 23

Soit $\mathcal{B}$ une base de E tel que $\dim E = n$. On appelle déterminant dans la base $\mathcal{B}$, d'une famille $\mathcal{F} = (u_1, \dots, u_n)$ de n vecteurs de E , le scalaire

$$\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = \det(\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}))$$

où $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$ est la matrice de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{B}$. En particulier, $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = 1$.

Remarque 11

De la définition, on déduit les propriétés suivantes, fondamentales, qui permettent à elles seules (avec $\det(I_n) = 1$) de caractériser le déterminant.

Propriétés du déterminant

Propriétés

- Soit $\mathcal{B}$ une base de E ($\dim E = n$). L'application $\det_{\mathcal{B}}$ est une forme n -linéaire alternée sur E , c'est à dire,

- ▶ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$; $u_1, \dots, u_n, u'_i \in E$; $\lambda \in \mathbb{K}$

$$\det_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_i + \lambda u'_i, \dots, u_n) = \det_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_i, \dots, u_n) + \lambda \det_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u'_i, \dots, u_n) ;$$

- ▶ pour tout $i < j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et pour tout $u_1, \dots, u_i, \dots, u_j, \dots, u_n \in E$,

$$\det_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_i, \dots, u_j, \dots, u_n) = -\det_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_j, \dots, u_i, \dots, u_n)$$

- Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a :

- ▶ si on multiplie une ligne (ou colonne) de A par un scalaire λ , le déterminant est multiplié par λ ;
- ▶ si on permute deux lignes (ou colonnes) de A son déterminant est multiplié par -1 ;
- ▶ si on ajoute à une ligne (resp. colonne) une combinaison linéaire des autres lignes (resp. colonnes) son déterminant ne change pas.

Propriétés du déterminant de matrices carrées

Des propriétés précédentes découle la propriété de multiplicativité suivante et ses conséquences :

Proposition 19

- Pour tout $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\det(AB) = \det A \times \det B$.
- Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, A est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$ et dans ce cas :

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)} .$$

- Soit $\mathcal{B}$ une base de E , et $\mathcal{C}$ famille d'éléments de E tel que $\text{card}(\mathcal{C}) = \dim E$, alors : $\mathcal{C}$ est une base de E si et seulement si $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{C}) \neq 0$. Dans ce cas, on a :

$$\det_{\mathcal{C}}(\mathcal{B}) = \frac{1}{\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{C})} .$$

- Si $P, A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec P inversible alors

$$\det(PAP^{-1}) = \det(A),$$

c'est à dire, deux matrices semblables ont le même déterminant.

Déterminant d'un endomorphisme

Proposition 20 (et définition)

Soit $u : E \longrightarrow E$ un endomorphisme, alors $\det(\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u))$ ne dépend pas du choix de la base $\mathcal{B}$ de E , on pose alors $\det(u) = \det(\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u))$ et on l'appelle le déterminant de u .

Exemple 8

Par exemple $\det(id_E) = 1$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$\det(\lambda id_E) = \lambda^n.$$

Proposition 21

Soit $u, v : E \longrightarrow E$ deux endomorphismes de E , on a :

- $\det(u \circ v) = \det(u) \det(v)$.
- u est un automorphisme de E si et seulement si $\det(u) \neq 0$. Dans ce cas,

$$\det(u^{-1}) = \frac{1}{\det(u)}.$$

Développement d'un déterminant suivant une ligne ou colonne

Proposition 22 (Développement selon ligne ou colonne)

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ alors

$$\begin{aligned}\det(A) &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{i,j} \Delta_{i,j} \quad \forall 1 \leq j \leq n \\ &= \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{i,j} \Delta_{i,j} \quad \forall 1 \leq i \leq n.\end{aligned}$$

où $\Delta_{i,j}$ est le déterminant, de taille $(n-1)$, de la matrice obtenue à partir de A en éliminant la $i^{\text{ème}}$ ligne et $j^{\text{ème}}$ colonne, $(-1)^{i+j} \Delta_{i,j}$ s'appelle cofacteur d'indice (i,j) .

On dit qu'on a développé le déterminant suivant la $j^{\text{ème}}$ colonne (resp. suivant la $i^{\text{ème}}$ ligne).

Exemple 9

On retrouve le déterminant d'une matrice triangulaire !

Exemple

Déterminant de Vandermonde

Soient $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}$, la matrice

$$V(x_1, \dots, x_n) := \left(x_i^{j-1} \right)_{1 \leq i, j \leq n} = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

est appelé matrice de vandermonde de $(x_1, \dots, x_n)$. Son déterminant est appelé le **déterminant de Vandermonde** de $(x_1, \dots, x_n)$.

Il est clair que si les x_i ne sont pas deux à deux distincts alors $V(x_1, \dots, x_n)$ n'est pas inversible et son déterminant nul. De manière précise :

$$\det(V(x_1, \dots, x_n)) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i).$$

Comatrice d'une matrice carrée

Définition 24 (comatrice)

On appelle comatrice de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, la matrice formée par ses cofacteurs, notée $\text{Com}(A)$ (c.à.d. $\text{Com}(A) = ((-1)^{i+j} \Delta_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$).

On déduit des formules précédentes la relation

Proposition 23

Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,

$${}^t\text{Com}(A) \cdot A = A \cdot {}^t\text{Com}(A) = \det(A) \cdot I_n$$

et si $\det A \neq 0$ alors

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} {}^t\text{Com}(A).$$

Déterminant de matrices par blocs

Matrices par blocs

- On appelle écriture par blocs d'une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, toute écriture de la forme

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c} A_{1,1} & \cdots & A_{1,\ell} \\ \hline \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline A_{k,1} & \cdots & A_{k,\ell} \end{array} \right)$$

où A_{ij} sont des matrices de $\mathcal{M}_{n_i,p_j}$ telles que $\sum n_i = n$ et $\sum p_j = p$.

Matrices diagonales et triangulaires par blocs

- Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on dit qu'elle est diagonale par blocs, si elle est de la forme :

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c|c} A_{1,1} & (0) & \cdots & (0) \\ \hline (0) & \ddots & \ddots & \vdots \\ \hline \vdots & \ddots & \ddots & (0) \\ \hline (0) & \cdots & (0) & A_{k,k} \end{array} \right)$$

On dit qu'elle est triangulaire supérieure (resp. inférieure) par blocs, si elle est de la forme :

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c|c} A_{1,1} & \cdots & \cdots & A_{1,k} \\ \hline (0) & \ddots & \ddots & \vdots \\ \hline \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \hline (0) & \cdots & (0) & A_{k,k} \end{array} \right) \quad (\text{resp } A = \left(\begin{array}{c|c|c|c} A_{1,1} & (0) & \cdots & (0) \\ \hline \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \hline \vdots & \ddots & \ddots & (0) \\ \hline A_{k,1} & \cdots & \cdots & A_{k,k} \end{array} \right)).$$

où pour tout $j \in [1, \ell]$, $A_{j,j} \in \mathcal{M}_{n_j}(\mathbb{K})$ avec $\sum n_i = n$.

Calcul par blocs

Somme et produit externe

Soient A et B deux matrices par blocs :

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c} A_{1,1} & \cdots & A_{1,\ell} \\ \hline \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline A_{k,1} & \cdots & A_{k,\ell} \end{array} \right) \quad \text{et} \quad B = \left(\begin{array}{c|c|c} B_{1,1} & \cdots & B_{1,\ell} \\ \hline \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline B_{k,1} & \cdots & B_{k,\ell} \end{array} \right)$$

où A_{ij} et B_{ij} sont des matrices de $\mathcal{M}_{n_i, p_j}$ telles que $\sum n_i = n$ et $\sum p_j = p$

On vérifie facilement que

$$A + B = \left(\begin{array}{c|c|c} A_{1,1} + B_{1,1} & \cdots & A_{1,\ell} + B_{1,\ell} \\ \hline \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline A_{k,1} + B_{k,1} & \cdots & A_{k,\ell} + B_{k,\ell} \end{array} \right)$$

et pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$

$$\lambda A = \left(\begin{array}{c|c|c} \lambda A_{1,1} & \cdots & \lambda A_{1,\ell} \\ \hline \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline \lambda A_{k,1} & \cdots & \lambda A_{k,\ell} \end{array} \right)$$

Calcul par blocs

Produit matriciel

Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, telles que :

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c} A_{1,1} & \cdots & A_{1,\ell} \\ \hline \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline A_{k,1} & \cdots & A_{k,\ell} \end{array} \right) \quad \text{et} \quad B = \left(\begin{array}{c|c|c} B_{1,1} & \cdots & B_{1,m} \\ \hline \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline B_{\ell,1} & \cdots & B_{\ell,m} \end{array} \right)$$

où pour tout $(i,j) \in [1,k] \times [1,\ell]$, $A_{ij} \in \mathcal{M}_{n_i,p_j}$ et $\sum n_i = n$, $\sum p_j = p$ et pour tout $(i,j) \in [1,\ell] \times [1,m]$, $B_{ij} \in \mathcal{M}_{p_i,q_j}$ et $\sum p_i = p$, $\sum q_j = q$. Le produit par blocs des matrices A et B est donné par :

$$A.B = \left(\begin{array}{c|c|c} C_{1,1} & \cdots & C_{1,m} \\ \hline \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline C_{k,1} & \cdots & C_{k,m} \end{array} \right) \quad \text{où} \quad C_{i,j} = \sum_{s=1}^{\ell} A_{i,s} B_{s,j}$$

Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs

Proposition 24

Étant donnée une matrice A triangulaire par blocs, telle que

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c|c} A_{1,1} & (0) & \cdots & (0) \\ \hline \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \hline \vdots & \ddots & \ddots & (0) \\ \hline A_{k,1} & \cdots & \cdots & A_{k,k} \end{array} \right),$$

alors,

$$\det(A) = \prod_{i=1}^k \det(A_{ii}).$$

En particulier, A est inversible, si et seulement si, toutes les matrices $A_{i,i}$, ($i = 1 \dots k$) sont inversibles.

Exemple de déterminant par blocs

Exemple 10

Soit la matrice d'ordre $2n$ ($n \geq 1$) :

$$A = \begin{pmatrix} a & & & & & & & b \\ & \ddots & & & & & & \\ & & a & & b & & & \\ & & b & & a & & & \\ & & & \ddots & & & & \\ & & & & & \ddots & & \\ b & & & & & & & a \end{pmatrix}$$

L'endomorphisme de $\mathbb{K}^{2n}$ que A représente dans la base canonique $(e_1, \dots, e_{2n})$, possède dans la base $(e_1, e_{2n}, e_2, e_{2n-1}, \dots, e_n, e_{n+1})$, la matrice diagonale par blocs

$$B = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} & & & \\ & \ddots & & \\ & & \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} & \end{pmatrix} \quad \text{et donc } \det A = (a^2 - b^2)^n.$$